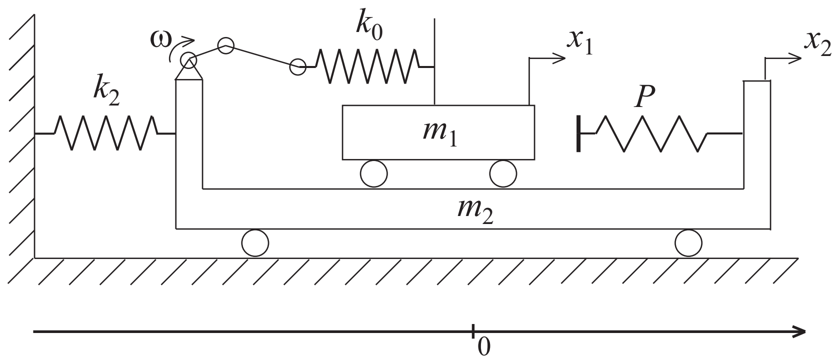
УДК 517.928.7; 531.8; 531.36

Асимптотическая устойчивость колебаний двухмассного резонансного грохота с односторонним ограничителем без зазора

О. Ю. Макаренков

Аннотация. В работе доказывается асимптотическая устойчивость периодических колебаний в модели резонансного грохота в предположении, что частоты порождающей системы соотносятся как 1:2 и частота внешнего двигателя совпадает с меньшей из этих частот. Такая постановка соответствует широко используемому режиму работы грохота – нелинейному резонансу. Обоснование проводится при помощи предложенной автором негладкой версии второй теоремы Н.Н. Боголюбова. Строго доказано, что найденный резонансный режим является двухчастотным.

1. Введение. В работе изучается поведение двухмассного резонансного грохота, расчетная схема которого представлена на фиг. 1.



Фиг. 1: Схема двухмассного резонансного грохота, приводимого в движение двигателем с частотой вращения ω. Жесткость пружины P описывается кусочно линейной функцией $P(x_1-x_2) = \max\{0, x_1 - x_2\}$. В состоянии покоя и при выключенном двигателе зазор между ограничителем P и телом m_1 равен нулю.

При выключенном двигателе и отсутствии трения система совершает двухчастотные колебания с частотами ω_1 и ω_2. Если включить двигатель и считать трение малым, то приближая ω к ω_1 или ω_2, в системе возникает резонанс. В [1, с. 137] замечено, что один из этих резонансов $w = \omega_2$ является нелинейным и что причиной нелинейности является содержащийся

в модели упругий ограничитель. Для обоснования данного утверждения в книге [1] использован так называемый метод эквивалентной линеаризации, являющийся не вполне строгим.

В настоящей работе показывается, что при формальном требовании малости жесткости ограничителя указанный нелинейный резонанс может быть строго изучен методом усреднения и, что асимптотическая устойчивость соответствующих колебаний может быть установлена при помощи негладкого аналога второй теоремы Н.Н. Боголюбова [2].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 разрабатывается способ приведения к стандартной форме принципа усреднения системы дифференциальных уравнений, описывающих наиболее общую механическую систему двух связанных тел. В разделе 3 вводятся условия применимости негладкого аналога второй теоремы Н.Н. Боголюбова. В третьем разделе полученный способ применяется к системе дифференциальных уравнений, описывающих модель грохота фиг. 1, в которой для простоты предполагается $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega$. Доказывается, что наличие упругого ограничителя приводит к асимптотически устойчивым периодическим колебаниям с двумя частотами ω и 2ω.

2. Общее уравнение для амплитуды асимптотически устойчивых периодических колебаний в слабонелинейных механических системах, содержащих два тела. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих координаты x_1 и x_2 двух тел, связанных посредством слабо нелинейных пружин, при учете вязкого трения и периодического воздействия, в наиболее общем виде можно записать как

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \end{pmatrix} + Mx + \begin{pmatrix} \varepsilon\dot{q}_1(Q_1(\varepsilon)x)Q_1(\varepsilon)\dot{x} \\ \varepsilon\dot{q}_2(Q_2(\varepsilon)x)Q_2(\varepsilon)\dot{x} \end{pmatrix} = \varepsilon F(t,x,\dot{x},\varepsilon) \qquad (2.1)$$

где $m_1, m_2 > 0$ – массы тел, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, M – 2×2-матрица, $Q_1(\varepsilon), Q_2(\varepsilon)$ – 1×2-матрицы и $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times[0,1] \to \mathbb{R}^2$. Условия на исполь-

зованные функции будут возложены позже, отметим лишь, что скалярные функции q_1 и q_2 непрерывны и кусочно-линейны, так что соответствующие производные $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$ – кусочно-постоянны. Совершим ряд преобразований. Перепишем систему (2.1) как

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \end{pmatrix} + Mx + \varepsilon \begin{pmatrix} \left(q_1(Q_1(\varepsilon)x(\cdot))\right)' \\ \left(q_2(Q_2(\varepsilon)x(\cdot))\right)' \end{pmatrix} = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$$

откуда видно, что вводя новые переменные (см. [3])

$$y_1(t) = m_1\dot{x}_1(t) + \varepsilon q_1(Q_1(\varepsilon)x(t)), \quad y_2(t) = m_2\dot{x}_2(t) + \varepsilon q_2(Q_2(\varepsilon)x(t))$$

можем переписать ее в виде четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{m_1}(y_1 - \varepsilon q_1(Q_1(\varepsilon)x)), \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m_2}(y_2 - \varepsilon q_2(Q_2(\varepsilon)x)) \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} &+ Mx = \varepsilon F\left(t, x, \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1}(y_1 - \varepsilon q_1(Q_1(\varepsilon)x)) \\ \frac{1}{m_2}(y_2 - \varepsilon q_2(Q_2(\varepsilon)x)) \end{pmatrix}, \varepsilon\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Соответствующая порождающая система выписывается как

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m_1}y_1, \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{m_2}y_2 \tag{2.3}$$

$$\dot{y}_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \qquad \dot{y}_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \tag{2.4}$$

где a_{ij} – компоненты матрицы M. Для применения принципа усреднения требуется предположить, что все решения системы (2.3)-(2.4) являются периодическими. Выясним условия, при которых это имеет место. Подставляя первое уравнение (2.3) в первое уравнение (2.4), второе уравнение (2.3) во второе уравнение (2.4), и полученное в первом случае уравнение в полученное во втором случае, получаем следующее уравнение для x_1

$$\ddot{\ddot{x}}_1 + \frac{a_{11}}{m_1}\ddot{x}_1 + \frac{a_{22}}{m_2}\ddot{x}_1 - \frac{a_{21}a_{12}}{m_1m_2}x_1 + \frac{a_{22}a_{11}}{m_1m_2}x_1 = 0 \tag{2.5}$$

при этом из первого уравнения (2.4)

$$x_2 = \left(-a_{11}x_1 - m_1\ddot{x}_1\right)/a_{12} \tag{2.6}$$

Поэтому, для того, чтобы система (2.3)-(2.4) имела только периодические решения необходимо и достаточно, чтобы собственные значения характеристического многочлена уравнения (2.5) были различны и чисто мнимые. Данный характеристический многочлен выписывается как

$$\lambda^4 + (a_{22}(1/m_2) + a_{11}(1/m_1))\lambda^2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})/(m_1 m_2) = 0$$

и его корни которого находятся по формуле

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}\Big(a_{22}\frac{1}{m_2} + a_{11}\frac{1}{m_1}\Big) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Big(a_{22}\frac{1}{m_2} - a_{11}\frac{1}{m_1}\Big)^2 + 4\frac{1}{m_1 m_2}a_{21}a_{12}} \quad (2.7)$$

Поэтому, каждое решение системы (2.3)-(2.4) является периодическим тогда и только тогда, когда

$$a_{21}a_{12} < a_{11}a_{22} \quad (2.8)$$

При этом, согласно правилу составления решений линейных уравнений (см. [4]), общее решение уравнения (2.5) записывается в виде $x_1(t) = a_{12}\left(A_{1C}\sin\omega_1 t + A_{1S}\cos\omega_1 t + A_{2C}\sin\omega_2 t + A_{2S}\cos\omega_2 t\right)$, где $w_{1,2} = \sqrt{-(\lambda_{1,2})^2}$ и $A_{1C}, A_{1S}, A_{2C}, A_{2S}$ – произвольные постоянные. Тогда, из (2.6) имеем $x_2(t) = (-a_{11} + m_1\omega_1^2)(A_{1C}\sin\omega_1 t + A_{1S}\cos\omega_1 t) + (-a_{11} + m_1\omega_2^2)(A_{2C}\sin\omega_2 t + A_{2S}\cos\omega_2 t)$. Таким образом, общее решение (x_1, x_2, y_1, y_2) системы (2.3)-(2.4) имеет вид:

$$(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))^* = \Omega(t)(A_{1C}, A_{1S}, A_{2C}, A_{2S})^*$$

где

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} a_{12}\sin(\omega_1 t) & a_{12}\cos(\omega_1 t) & a_{12}\sin(\omega_2 t) & a_{12}\cos(\omega_2 t) \\ (-a_{11} + m_1\omega_1^2)\sin(\omega_1 t) & (-a_{11} + m_1\omega_1^2)\cos(\omega_1 t) & (-a_{11} + m_1\omega_2^2)\sin(\omega_2 t) & (-a_{11} + m_1\omega_2^2)\cos(\omega_2 t) \\ m_1\omega_1 a_{12}\cos(\omega_1 t) & -m_1\omega_1 a_{12}\sin(\omega_1 t) & m_1\omega_2 a_{12}\cos(\omega_2 t) & -m_1\omega_2 a_{12}\sin(\omega_2 t) \\ m_2\omega_1(-a_{11} + m_1\omega_1^2)\cos(\omega_1 t) & -m_2\omega_1(-a_{11} + m_1\omega_1^2)\sin(\omega_1 t) & m_2\omega_2(-a_{11} + m_1\omega_2^2)\cos(\omega_2 t) & -m_2\omega_2(-a_{11} + m_1\omega_2^2)\sin(\omega_2 t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Лемма 1. *Пусть $\Omega(t)$- фундаментальная система решений линейной системы $\dot{v} = Cv$, где C – $n \times n$-матрица. Непрерывно дифференцируемая функция $t \mapsto v(t)$ является на отрезке $[0, t_0]$ решением системы*

$$\dot{v} = Cv + g(t, v) \tag{2.10}$$

где $g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, тогда и только тогда, когда функция

$$u(t) = \Omega(t)^{-1} v(t) \tag{2.11}$$

является на этом отрезке решением системы

$$\dot{u} = \Omega(t)^{-1} g(t, \Omega(t) u) \tag{2.12}$$

Доказательство проводится аналогично [5, лемма 2.4].

Таким образом, для приведения системы (2.2) к стандартной форме принципа усреднения необходимо вычислить обратную к (2.9) матрицу. Прямой подстановкой проверяется, что эта матрица дается формулой

$$\Omega(t)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega_1}\cos\omega_1 t & -\frac{1}{\omega_2}\sin\omega_1 t & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t & -\frac{1}{\omega_2}\cos\omega_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_2}\cos\omega_2 t & \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_2 t \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t & \frac{1}{\omega_1}\cos\omega_2 t \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \frac{1}{(m_1)^2 m_2 a_{12}((\omega_1)^2 - (\omega_2)^2)} \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t & -\sin\omega_2 t & 0 & 0 \\ \sin\omega_2 t & \cos\omega_2 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega_1 t & -\sin\omega_1 t \\ 0 & 0 & \sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} m_2 p_{22} m_1 \omega_2 \sin\omega_2 t & -m_1 a_{12} m_2 \omega_2 \sin\omega_2 t & m_2 p_{22}\cos\omega_2 t & -m_1 a_{12}\cos\omega_2 t \\ m_2 p_{22} m_1 \omega_2 \cos\omega_2 t & -m_1 a_{12} m_2 \omega_2 \cos\omega_2 t & -m_2 p_{22}\sin\omega_2 t & m_1 a_{12}\sin\omega_2 t \\ m_2 p_{21} m_1 \omega_1 \sin\omega_1 t & -m_1 a_{12} m_2 \omega_1 \sin\omega_1 t & m_2 p_{21}\cos\omega_1 t & -m_1 a_{12}\cos\omega_1 t \\ m_2 p_{21} m_1 \omega_1 \cos\omega_1 t & -m_1 a_{12} m_2 \omega_1 \cos\omega_1 t & -m_2 p_{21}\sin\omega_1 t & m_1 a_{12}\sin\omega_1 t \end{pmatrix}$$

где $p_{21} = -a_1 1 m_1 \omega^2$, $p_{22} = -a_{11} + m_1\omega_2^2$. Используя лемму 1, можем записать систему (2.2) в стандартной форме принципа усреднения

$$\dot{A} = \varepsilon \Omega(t)^{-1} g(t, A, \varepsilon) \tag{2.13}$$

где $A = (A_{1C}, A_{1S}, A_{2C}, A_{2S}) \in \mathbb{R}^4$,

$$g(t, A, \varepsilon) = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{m_1} q_1 \left(Q_1(\varepsilon) \left(\Omega_1(t), \Omega_2(t) \right)^* A \right) \\ -\frac{1}{m_2} q_2 \left(Q_2(\varepsilon) \left(\Omega_1(t), \Omega_2(t) \right)^* A \right) \\ F\left(t, \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \end{pmatrix} A, \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1}\left(\Omega_3(t) A - \varepsilon q_1 \left(Q_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_1(t) \end{pmatrix} A \right)\right) \\ \frac{1}{m_2}\left(\Omega_4(t) A - \varepsilon q_2 \left(Q_2(\varepsilon) \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_1(t) \end{pmatrix} A \right)\right) \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \tag{2.14}$$

и $\Omega_i(t)$ обозначает i-ю компоненту 4-мерного вектора $\Omega_i(t)A$. Так как матрица $\Omega(t)$ равномерно ограничена на $\mathbb{R}$, то асимптотически устойчивому решению $t \to A(t)$ системы (2.13) соответствует асимптотически устойчивое решение $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))^* = \Omega(t)A(t)$ системы (2.2). Более того, компоненты (y_1, y_2) этого решения, очевидно, дифференцируемы по времени и, значит, компонента (x_1, x_2) является, в этом случае, асимптотически устойчивым решением исходной системы (2.1).

Итак, установлено, что если выполнено условие (2.8), то асимптотически устойчивым решениям $A(t)$ системы (2.13) соответствуют асимптотически устойчивые решения $(x_1(t), x_2(t)) = (\Omega_1(t)A(t), \Omega_2(t)A(t))$ системы (2.1), где матрица $\Omega(t)$ дается формулой (2.9).

3. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем с интегрально дифференцируемыми правыми частями. В этом разделе доказывается, что правая часть полученной в разделе 2 системы (2.13) удовлетворяет требованиям предложенного автором в [2] негладкого аналога второй теоремы Н. Н. Боголюбова.

Определение 1. *Функцию* $f \in C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n\times[0,1],\mathbb{R}^n)$ *назовем интегрально дифференцируемой, если каждому* $\gamma > 0$ *соответствует* $\delta > 0$ *и множество* $M \subset [0,T]$, *лебегова мера которого не превосходит* $\gamma > 0$, *такие, что для всех* $\|v - v_0\| < \delta,\quad t \in [0,T]\setminus M$ *и* $\varepsilon \in [0,\delta]$ *функция* $f(t,\cdot,\varepsilon)$ *дифференцируема в точке* v *и*

$$\|f'_v(t,v,\varepsilon) - f'_v(t,v_0,0)\| \leqslant \gamma$$

Лемма 2. *Пусть* $h \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times[0,1],\mathbb{R}^n)$ *и*
$R^n_s = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \mathrm{sign}(\xi_i) = s_i, i \in \overline{1,n}\}, s \in \{-1,1\}^n = \{-1,1\}\times\cdots\times\{-1,1\}$. *Предположим, что существует* 2^n *функций* $h_s \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times[0,1],\mathbb{R}^n),\quad s\in\{-1,1\}^n$ *таких, что*

$$h(t,\xi,\varepsilon) = h_s(t,\xi,\varepsilon),\quad (t,\xi,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times[0,1],\quad s\in\{-1,1\}^n$$

Предположим, что $D \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times[0,1],\mathbb{R}^n)$ *и функция* $D_1(\cdot,v_0,0)\cdot\ldots\cdot D_n(\cdot,v_0,0)$ *имеет конечное число нулей на* $[0,T]$. *Тогда функция* $(t,v,\varepsilon)\mapsto h(t,D(t,v,\varepsilon),\varepsilon)$ *удовлетворяет требованию интегральной дифференцируемости.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k \leqslant T$ – все нули функции $D_1(\cdot,v_0,0)\cdot\ldots\cdot D_n(\cdot,v_0,0)$ на отрезке $[0,T]$. Зафиксируем $\gamma > 0$ и положим

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^k \left(t_i - \tfrac{\gamma}{2k}, t_i + \tfrac{\gamma}{2k}\right)\right)\cap[0,T]$$

то есть

$$D_1(\cdot,v_0,0)\cdot\ldots\cdot D_n(\cdot,v_0,0)\neq 0\quad \text{для всех } t\in[0,T]\backslash M \tag{3.1}$$

Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что $D_1(t,v,\varepsilon)\cdot\ldots\cdot D_n(t,v,\varepsilon)\neq 0$ для всех $t\in[0,T]\setminus M,\quad \|v-v_0\|<\delta,\quad \varepsilon\in[0,\delta]$. Действительно, предположив противное, получаем последовательность $(t_m,v_m,\varepsilon_m)\to(t_0,v_0,0)$ при $m\to\infty$, где $t_0\in[0,T]\backslash M$ и такую, что $D_1(t_m,v_m,\varepsilon_m)\cdot\cdots\cdot D_n(t_m,v_m,\varepsilon_m)=0$ при $m\in\mathbb{N}$, в чем противоречие с (3.1). Таким образом, при каждом $t\in[0,T]\setminus M,\quad \|v-v_0\|<\delta$ и $\varepsilon\in[0,\delta]$ найдется $s_{t,v,\varepsilon}\in\{-1,1\}^n$ такое,

что $D(t,v,\varepsilon) \in R^n_{s_{t,v,\varepsilon}}$ и, значит, функция $h(t, D(t,\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ дифференцируема в точке v. Заметим, что $\delta > 0$ может быть уменьшено еще и настолько, что

$$s_{t,v,\varepsilon} = s_{t,v_0,0} \quad \text{при всех} \quad t \in [0,T] \setminus M, \quad \|v - v_0\| < \delta, \quad \varepsilon \in [0,\delta]$$

Аналогично, доказывая от противного и выделяя соответствующую сходящуюся подпоследовательность, приходим к заключению, что $D(t_0, v_0, 0) \in R^n_{\lim\limits_{m\to\infty} s_{t_m,v_m,\varepsilon_m}}$, где $\lim_{m\to\infty} s_{t_m,v_m,\varepsilon_m} \neq s_{t_0,v_0,0}$ и $t_0 \in [0,T] \setminus M$. Но, по определению, $R^n_{s_1} \cap R^n_{s_2} = \emptyset$ при $s_1 \neq s_2$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Частный случай функций D_1 и D_2 при $n = 2$ изучался ранее в [2] и в работах А. Буйка.

Оказывается, для систем (3.2), в которых правая часть не везде дифференцируема, но липшицева и удовлетворяет требованию интегральной дифференцируемости, утверждение второй теоремы Н. Н. Боголюбова [6, Теорема II] полностью справедливо. Соответствующий результат установлен автором в [2], но некоторые похожие идеи неявно использовались еще в классических работах по динамике подвесных мостов (см. напр. [7]). Более точно, имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $h \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ и $D \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ T-периодичны по времени и удовлетворяют условиям леммы 2. Рассмотрим систему*

$$\dot{A} = \varepsilon h(t, D(t, A, \varepsilon), \varepsilon) \tag{3.2}$$

и соответствующую функцию усреднения

$$\overline{h}(A) = \frac{1}{T}\int_0^T h(\tau, D(\tau, A, 0), 0)d\tau$$

Пусть $A_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый нуль функции $\overline{h}$, в окрестности некоторого $\overline{h}$ непрерывно дифференцируема. Тогда, если все собственные значения матрицы $\overline{h}'(A_0)$ отрицательны, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (3.2) имеет единственное T- периодическое решение A_ε такое, что

$A_\varepsilon(t) \to A_0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Более того, решение* A_ε *асимптотически устойчиво.*

Доказательство следует из ([2], теорема 2.5), леммы 2 и замечания о том, что в условиях леммы 2 функция $(t, v, \varepsilon) \mapsto h(t, D(t, v, \varepsilon), \varepsilon)$ липшицева по v равномерно на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$.

4. Асимптотическая устойчивость и двухчастотность резонансных колебаний двухмассного резонансного грохота. Уравнения изучаемого грохота (фиг. 1) выписываются (см. [1], с. 133) как

$$m_1\ddot{x}_1 + \varepsilon\dot{P}(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \varepsilon k_0(\dot{\eta}(t) - \dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \\ + P(x_1 - x_2) - k_0(\eta(t) - x_1 + x_2) = 0 \tag{4.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - \varepsilon\dot{P}(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon k_2\dot{x}_2 + \varepsilon k_0(\dot{\eta}(t) - \\ - \dot{x}_1 + \dot{x}_2) - P(x_1 - x_2) + k_2 x_2 + k_0(\eta(t) - x_1 + x_2) = 0 \tag{4.2}$$

Предположение о малости жесткости пружины приводит к функции P вида $P(\Delta) = \varepsilon\widehat{k}_1\Delta^+$, где $\Delta^+ = \max\{0, \Delta\}$. Коэффициенты k_0 и k_2 удобно представить в виде $k_0 = \overline{k}_0 + \varepsilon\widetilde{k}_0$, $k_2 = \overline{k}_2 + \varepsilon\widetilde{k}_2$. Для достижения резонанса амплитуда, сообщаемая электродвигателем, выбирается порядка $\varepsilon > 0$, то есть положим $\overline{k}_0\eta(t) = \varepsilon\widetilde{\eta}(t)$. Для приведения полученной системы к стандартной форме принципа усреднения используем результат раздела 2, функции которого принимают в случае системы (4.1)-(4.2) следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{k}_0 & -\overline{k}_0 \\ -\overline{k}_0 & \overline{k}_0 + \overline{k}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1(\varepsilon) \\ Q_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = \varepsilon\widehat{k}_1(x_1 - x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и $q_1(v) = q_2(v) = v^+$. Функцию (2.14) запишем в удобном для применения теоремы (1) виде:

$$g(t, A, \varepsilon) = \widetilde{g}(t, D(t, A, \varepsilon))$$

где

$$\widetilde{g}(t,\xi,\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_1}(\varepsilon\widehat{k}_1\xi_1) \\ -\frac{1}{m_2}(\varepsilon\widehat{k}_1\xi_1) \\ -\widehat{k}_1(\xi_1)^+ + \widetilde{k}_0(-\xi_1) + \overline{k}_0(-\xi_2) + \widetilde{\eta}(t) + \varepsilon\widetilde{k}_0(-\xi_2) + \varepsilon k_0\dot{\eta}(t) \\ -\widehat{k}_1(\xi_1)^+ - \widetilde{k}_0(-\xi_1) - \overline{k}_0(-\xi_2) - \widetilde{\eta}(t) - \widetilde{k}_2\xi_4 - \overline{k}_2(\xi_4-\xi_2) \\ -\varepsilon\widetilde{k}_0(-\xi_2) - \varepsilon k_0\dot{\eta}(t) - \varepsilon\widetilde{k}_2(\xi_4-\xi_2) \end{pmatrix}$$

$$D(t,A,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon^2\widehat{k}_1\frac{1}{m_1} + \varepsilon^2\widehat{k}_1\frac{1}{m_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon^2\widehat{k}_1\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(t)A - \Omega_2(t)A \\ \frac{1}{m_1}\Omega_3(t)A - \frac{1}{m_2}\Omega_4(t)A \\ \Omega_1(t)A \\ \frac{1}{m_1}\Omega_3(t)A \end{pmatrix}$$

Так как дифференцируемость функции $(t,\xi,\varepsilon) \mapsto \widetilde{g}(t,\xi,\varepsilon)$ нарушается только на гиперплоскости $\xi_1 = 0$, то функция $h(t,\xi,\varepsilon) = \Omega^{-1}(t)\widetilde{g}(t,\xi,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Так как строки матрицы $\Omega(t)$ линейно независимы, то условиям леммы 2 удовлетворяет также и функция D. Для применения теоремы 1 остается найти условия, при которых функция

$$t \mapsto \Omega^{-1}(t)\widetilde{g}(t, D(t,A,\varepsilon),\varepsilon) \tag{4.3}$$

периодична. Условие (2.8) приобретает вид $-\overline{k}_0(-\overline{k}_0) < -\overline{k}_0(-\overline{k}_2 + \overline{k}_0)$, то есть выполнено всегда. Хотя для периодичности функции (4.3) достаточно, чтобы частоты ω_1 и ω_2 из (2.9) были соизмеримы, наибольший интерес представляет случай, когда $\omega_2 = l\omega_1$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Подставляя даваемые формулой (2.7) значения ω_1 и ω_2, приходим к следующему условию периодичности функции (4.3)

$$l^2\left(\frac{\overline{k}_2 + \overline{k}_0}{m_2} + \frac{\overline{k}_0}{m_1}\right)^2 = (1+l^2)^2 4\frac{\overline{k}_0\overline{k}_2}{m_1 m_2} \quad \text{для некоторого} \quad l \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

$$\widetilde{\eta}\left(t + \frac{2\pi}{\min\{\omega_1,\omega_2\}}\right) = \widetilde{\eta}(t) \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

Алгоритм вычисления среднего от функции (4.3) определяется числом l в (4.4) и функцией $\eta(t)$ в (4.5). В этой статье мы проводим это вычисление для случая $l = 2$ и $\eta(t) = \cos(\omega t)$, что позволяет заменить основное явление – двухчастотность колебаний грохота.

4.1. Вычисление функции усреднения в случае $\omega_2 = 2w, \omega_1 = w$. Доказательство наличия в порождающем решении гармоники с частотой $2w$. Усредняя функцию (4.3) за период $2\pi/\omega$, при $\widehat{k}_1 = 0$ получаем

$$\overline{h}_0(A_{1C}, A_{1S}, A_{2C}, A_{2S}) = \begin{pmatrix} -\alpha A_{1C} - \beta A_{1S} + \mu \\ \beta A_{1C} - \alpha A_{1S} \\ -\gamma A_{2C} - \sigma A_{2S} \\ \sigma A_{2C} - \gamma A_{2S} \end{pmatrix}$$

где

$$\alpha = \frac{\omega}{6}\left(\frac{\overline{k}_0 \overline{k}_2}{m_1 m_2 \omega^3} - \frac{\overline{k}_0}{m_1 \omega} - \frac{\overline{k}_0 + \overline{k}_2}{m_2 \omega} + 4\omega\right)$$
$$\beta = \frac{\omega}{6}\left(\frac{4\widetilde{k}_0}{\overline{k}_0} + \frac{\overline{k}_0 \widetilde{k}_2}{m_1 m_2 \omega^4} - \frac{\widetilde{k}_0}{m_1 \omega^2} - \frac{\widetilde{k}_0 + \widetilde{k}_2}{m_2 \omega^2}\right)$$
$$\gamma = \frac{\omega}{6}\left(\frac{4\overline{k}_0}{m_1 \omega} + \frac{4\overline{k}_0}{m_2 \omega} + \frac{4\overline{k}_2}{m_2 \omega} - \frac{\overline{k}_0 \overline{k}_2}{m_1 m_2 \omega^3} - 4\omega\right)$$
$$\sigma = \frac{\omega}{6}\left(\frac{2\widetilde{k}_0}{m_1 \omega^2} + \frac{2\widetilde{k}_0}{m_2 \omega^2} + \frac{2\widetilde{k}_2}{m_2 \omega^2} - \frac{2\widetilde{k}_0}{\overline{k}_0} - \frac{\overline{k}_0 \widetilde{k}_2}{2 m_1 m_2 \omega^4}\right)$$
$$\mu = \frac{1}{6 m_1 \omega^3}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) r - \frac{2}{3\overline{k}_0 m_1 \omega} r$$

Условия (см. теорему 1) существования у функции $\overline{h}_0$ единственного нуля A_0 такого, что собственные значения матрицы $(\overline{h}_0)'(A_0)$ отрицательны, приводит к следующим предположениям:

$$\alpha > 0, \gamma > 0 \tag{4.6}$$

и соответствующий нуль дается формулой

$$(\widetilde{A}_{1C}, \widetilde{A}_{1S}, \widetilde{A}_{2C}, \widetilde{A}_{2S}) = \left(\frac{\mu\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\mu\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, 0, 0\right) \tag{4.7}$$

Таким образом, приходим к следующему предложению.

Предложение 1. ($\widehat{k}_1 = 0$) *Пусть для $l = 2$ выполнены предположения (4.4)-(4.5). Пусть выполнены условия (4.6). Тогда, при $\widehat{k}_1 = 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, система (4.1)-(4.2) имеет единственное $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое решение $(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon})$ такое, что*

$$\begin{pmatrix} x_{1,\varepsilon}(t) \\ x_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\overline{k}_0 \frac{\mu\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \sin(\omega t) + \overline{k}_0 \frac{\mu\beta}{\alpha^2+\beta^2} \cos(\omega t) \\ (-\overline{k}_0 + m_1\omega^2) \frac{\mu\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \sin(\omega t) + (-\overline{k}_0 + m_1\omega^2) \frac{\mu\beta}{\alpha^2+\beta^2} \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon \to 0$. Решение $(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon})$ асимптотически устойчиво.

Пусть теперь $\widehat{k}_1 \neq 0$ и $\overline{h}_{\widehat{k}_1}$ – среднее значение соответствующей функция (4.3). Прежде всего заметим, что существует $\delta > 0$ такое, что $\overline{h}_{\widehat{k}_1}$ непрерывно дифференцируема при $\widehat{k}_1 \in [0, \delta]$ в δ-окрестности точки $(\widetilde{A}_{1C}, \widetilde{A}_{1S}, \widetilde{A}_{2C}, \widetilde{A}_{2S})$. Утверждение следует из теоремы о неявной функции ([8], Гл. X, §2) и того, что функция $t \mapsto (\Omega_1(t) - \Omega_2(t))(\widetilde{A}_{1C}, \widetilde{A}_{1S}, \widetilde{A}_{2C}, \widetilde{A}_{2S})^*$ пересекает 0 трансверсально. Далее, вновь по теореме о неявной функции, при всех достаточно малых $\widehat{k}_1 > 0$ функция $\overline{h}_{\widehat{k}_1}$ имеет единственный нуль $(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, A_{2C,\widehat{k}_1}, A_{2S,\widehat{k}_1})$ такой, что

$$(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, A_{2C,\widehat{k}_1}, A_{2S,\widehat{k}_1}) \to \left(\frac{\mu\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{\mu\beta}{\alpha^2+\beta^2}, 0, 0 \right) \quad \text{при} \quad \widehat{k}_1 \to 0 \qquad (4.8)$$

Из непрерывности производной функции $\overline{h}_{\widehat{k}_1}$ следует, что при достаточно малых $\widehat{k}_1 > 0$ собственные значения матрицы $(\overline{h}_{\widehat{k}_1})'(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, A_{2C,\widehat{k}_1}, A_{2S,\widehat{k}_1})$ имеют отрицательные вещественные части. Уменьшим $\delta > 0$ еще и так, что

$$A_{1C,\widehat{k}_1} > 0 \quad \text{и} \quad A_{1S,\widehat{k}_1} > 0 \quad \text{при} \quad \widehat{k}_1 \in [0, \delta] \qquad (4.9)$$

и покажем, что

$$A_{2C,\widehat{k}_1} \neq 0 \quad \text{или} \quad A_{2S,\widehat{k}_1} \neq 0 \quad \text{при любом} \quad \widehat{k}_1 \in [0, \delta] \qquad (4.10)$$

Предположим, что это не так, то есть $A_{2C,\widehat{k}_1} = A_{2S,\widehat{k}_1} = 0$ при некотором $\widehat{k}_1 \in [0, \delta]$. Для вычисления функции усреднения $\overline{h}_{\widehat{k}_1}$ в точке $\widetilde{\widetilde{A}} =$

$(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, 0, 0)$ вычислим $(\Omega_1(t)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(t)\widetilde{\widetilde{A}})^+$. Имеем

$$\Omega_1(t)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(t)\widetilde{\widetilde{A}} = (a_{12} + a_{11} - m_1\omega^2)(A_{1C,\widehat{k}_1}\sin(\omega t) + A_{1S,\widehat{k}_1}\cos(\omega t)). \quad (4.11)$$

Два последовательных нуля функции (4.11) определяются формулами

$$t_1 = -t_2, \quad t_2 = \frac{1}{\omega}\arccos\left(\frac{A_{1C,\widehat{k}_1}}{\sqrt{(A_{1C,\widehat{k}_1})^2 + (A_{1S,\widehat{k}_1})^2}}\right)$$

при этом $\left(\Omega_1(\cdot)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(\cdot)\widetilde{\widetilde{A}}\right)'(t_1) = -m_1\omega^3\sqrt{(A_{1C,\widehat{k}_1})^2 + (A_{1S,\widehat{k}_1})^2}$, откуда следует, что $(\Omega_1(t)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(t)\widetilde{\widetilde{A}})^+ = \Omega_1(t)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(t)\widetilde{\widetilde{A}}$, при $t \in [t_1, t_2]$, и $(\Omega_1(t)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(t)\widetilde{\widetilde{A}})^+ = 0$, при $t \in [t_2, t_1 + 2\pi/\omega]$. Полученный вид функции $t \mapsto (\Omega_1(t)\widetilde{\widetilde{A}} - \Omega_2(t)\widetilde{\widetilde{A}})^+$ позволяет вычислить функцию $\overline{h}_{\widehat{k}_1}(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, 0, 0)$ и прийти к заключению, что последние две строки системы $\overline{h}_{\widehat{k}_1}(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, 0, 0) = 0$ записываются в виде

$$\widehat{k}_1 \frac{-\overline{k}_0(m_1 + m_2) + m_1 m_2\omega^2}{18\overline{k}_0 m_1 m_2 \omega^2} \begin{pmatrix} A_{1S,\widehat{k}_1} & A_{1S,\widehat{k}_1} \\ -A_{2C,\widehat{k}_1} & A_{2C,\widehat{k}_1} \end{pmatrix} \left(\frac{3A_{1S,\widehat{k}_1}}{\sqrt{(A_{1C,\widehat{k}_1})^2 + (A_{1S,\widehat{k}_1})^2}},\right.$$
$$\left.\sin\left(3\arccos\left(\frac{3A_{1C,\widehat{k}_1}}{\sqrt{(A_{1C,\widehat{k}_1})^2 + (A_{1S,\widehat{k}_1})^2}}\right)\right)\right)^* = 0 \quad (4.12)$$

Если

$$m_1 m_2 \omega^2 \neq \overline{k}_0(m_1 + m_2) \quad (4.13)$$

то из соотношений (4.12) получаем, что по крайней мере одно из чисел $A_{1S,\widehat{k}_1}$ и $A_{1C,\widehat{k}_1}$ равно нулю, что противоречит (4.9) и доказывает справедливость (4.10). Таким образом, приходим к следующему предложению.

Предложение 2. ($\widehat{k}_1 \neq 0$). *Пусть выполнены условия предложения 1 и условие (4.13). Тогда существует $\delta > 0$, при котором каждому $\widehat{k}_1 \in (0, \delta]$ соответствует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (4.1)-(4.2)*

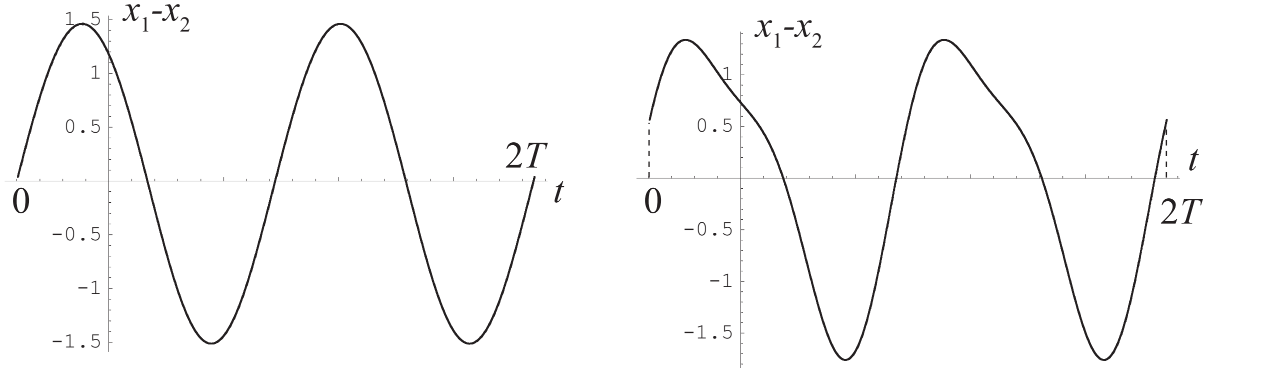
имеет единственное T-периодическое решение $(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon})$ такое, что

$$\begin{pmatrix} x_{1,\varepsilon}(t) \\ x_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\overline{k}_0 A_{1C,\widehat{k}_1} \sin(\omega t) - \overline{k}_0 A_{1S,\widehat{k}_1} \cos(\omega t) - \\ -\overline{k}_0 A_{2C,\widehat{k}_1} \sin(2\omega t) - \overline{k}_0 A_{2S,\widehat{k}_1} \cos(2\omega t) \\ (m_1\omega^2 - \overline{k}_0) A_{1C,\widehat{k}_1} \sin(\omega t) + (m_1\omega^2 - \overline{k}_0) A_{1S,\widehat{k}_1} + \\ +(4m_1\omega^2 - \overline{k}_0) A_{2C,\widehat{k}_1} \sin(2\omega t) + (4m_1\omega^2 - \overline{k}_0) A_{2S,\widehat{k}_1} \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon \to 0$, где либо $A_{2C,\widehat{k}_1} \neq 0$, либо $A_{2S,\widehat{k}_1} \neq 0$. При этом $(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, A_{2C,\widehat{k}_1}, A_{2S,\widehat{k}_1}) \to (\frac{\mu\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{\mu\beta}{\alpha^2+\beta^2}, 0, 0)$ при $\widehat{k}_1 \to 0$ и решение $(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon})$ асимптотически устойчиво.

4.2. Пример конкретных параметров резонансного грохота, приводящих к двухчастотным колебаниям. В этом подразделе приводится пример конкретных параметров грохота, удовлетворяющих всем условиям предложения (2). Из (4.4) имеем $\overline{k}_2 = \overline{k}_0 \cdot (m_2/m_1) \cdot (1/4l^2) \left((1+l^2) - \sqrt{(1-l^2) - 4l^2(m_1/m_2)}\right)^2$. В частности, приняв $m_1 = 11, m_2 = 64$, получаем $\overline{k}_2 = (25/11)\overline{k}_0$, на основании чего зафиксируем $\overline{k}_0 = 11, \overline{k}_2 = 25$. Подставляя полученные значения в формулу (2.7), получаем $\omega = \omega_1 = \sqrt{5}/4$, $2\omega = \omega_2 = \sqrt{5}/2$. Соответствующие значения $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \eta$ находятся как $\alpha = \sqrt{5}\pi/4$, $\beta = \pi\widetilde{k}_0/132 + 11\pi\widetilde{k}_2/300$, $\gamma = \sqrt{5}\pi$, $\sigma = \pi\widetilde{k}_0/6 + \pi\widetilde{k}_2/150$, $\eta = -4\pi r/1815$, в частности, условие (4.6) выполнено. По формуле (4.7) находим $(\widetilde{A}_{1C}, \widetilde{A}_{1S}) = -r\left(3403125 + 625(\widetilde{k}_0)^2 + 6050\widetilde{k}_0\widetilde{k}_2 + 14641(\widetilde{k}_2)^2\right)^{-1} (6000\sqrt{5}, 80(25\widetilde{k}_0 + 121\widetilde{k}_2)/11)$. Наконец, условие (4.13), очевидно, выполнено и предложение (2) позволяет сформулировать следующий результат.

Предложение 3. *Пусть $m_1 = 11$, $m_2 = 64$, $\overline{k}_0 = 11$, $\overline{k}_2 = 25$ и $\widetilde{k}_0, \widetilde{k}_2, r > 0$ – произвольны. Тогда существует $\delta > 0$, при котором каждому $\widehat{k}_1 \in (0, \delta]$ соответствует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (4.1)-(4.2)*



Фиг. 2: Численное моделирование асимптотически устойчивых решений системы (4.1)-(4.2) при $m_1 = 11$, $m_2 = 64$, $\overline{k}_0 = 11$, $\overline{k}_2 = 25$, $\widetilde{k}_0 = 0$, $\widetilde{k}_2 = 0$, $\varepsilon = 0.001$, $r = 10$. Слева: $\widehat{k}_1 = 0$, справа: $\widehat{k}_1 = 25$.

имеет единственное $8\pi/\sqrt{5}$-периодическое решение $(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon})$ такое, что

$$\begin{pmatrix} x_{1,\varepsilon}(t) \\ x_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \begin{array}{r} -11A_{1C,\widehat{k}_1} \sin\left(\sqrt{5}t/4\right) - 11A_{1S,\widehat{k}_1} \cos\left(\sqrt{5}t/4\right) - \\ -11A_{2C,\widehat{k}_1} \sin\left(\sqrt{5}t/2\right) - 11A_{2S,\widehat{k}_1} \cos\left(\sqrt{5}t/2\right) \\ -(121/16)A_{1C,\widehat{k}_1} \sin\left(\sqrt{5}t/4\right) - (121/16)A_{1S,\widehat{k}_1} \cos\left(\sqrt{5}t/4\right) + \\ +(11/4)A_{2C,\widehat{k}_1} \sin\left(\sqrt{5}t/2\right) + (11/4)A_{2S,\widehat{k}_1} \cos\left(\sqrt{5}t/2\right) \end{array} \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon \to 0$, где либо $A_{2C,\widehat{k}_1} \neq 0$, либо $A_{2S,\widehat{k}_1} \neq 0$. При этом $\left(A_{1C,\widehat{k}_1}, A_{1S,\widehat{k}_1}, A_{2C,\widehat{k}_1}, A_{2S,\widehat{k}_1}\right) \to \left(\widetilde{A}_{1C}, \widetilde{A}_{1S}, 0, 0\right)$ при $k_1 \to 0$ и решение $(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon})$ асимптотически устойчиво.

Представленное на фиг. 2 численное моделирование подтверждает, что при $\widehat{k}_1 \neq 0$ колебания системы (4.1)-(4.2) действительно имеют неодночастотный характер.

Работа поддержана грантом BF6M10 Роснауки и CRDF (программа BRHE) и грантом МК-1620.2008.1 Президента РФ молодым кандидатам наук. Исследования проведены в ходе стажировки автора в Институте Проблем Управления РАН под руководством проф. В. Н. Тхая и финансируемой грантом РФФИ 08-01-90704-моб_ст. Исследование из раздела 3 поддержано грантом 09-01-90407-Укр_ф_а РФФИ, остальное исследование – грантом 09-01-00468-а. Автор благодарит И. С. Мартынову за помощь в компьютерном наборе статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Крюков Б.И.* Динамика вибрационных машин резонансного типа. АН УССР. Киев, 1967. 211 с.

[2] *Буйка А., Либре Ж., Макаренков О. Ю.* К теореме Ю. А. Митропольского о периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы // ДАН 2008. Т. 421. №3. С. 302–304.

[3] *Levinson N.* A second order differential equation with singular solutions // Annals of Math. 1949. V. 50, no. 1, P. 127–153.

[4] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Физматлит, 1974. 331 с.

[5] *Макаренков О.* Индекс Пуанкаре и периодические решения возмущенных автономных систем // Труды ММО 2009, Т. 70, в печати.

[6] *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Акад. Наук Укр. ССР, 1945. 140 с.

[7] *Glover J., Lazer A. C., McKenna P. J.,* Existence and stability of large scale nonlinear oscillations in suspension bridges // Z. Angew. Math. Phys. 1989. V. 40. No. 2. P. 172–200.

[8] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М.: Физматлит, 1976. 543 с.

Воронеж
e-mail: omakarenkov@math.vsu.ru

Поступила в редакцию
30.10.2008